



Regionale Didaktische Zentren (RDZ-PHSG)

Lernumgebung ZAHL:reich

Handreichung für Lehrpersonen



Abbildung 1: Die Unendlichkeit erleben

Impressum

Entwicklung der Lernumgebung

Inhaltliche Konzeptionierung und Umsetzung

Erstentwicklung RDZ Gossau 2021: Johannes Gunzenreiner (Leitung), Sandra Buchmann (Lernbegleitung), Samuel Hächler (Lernbegleitung), Nicolai Kozakiewicz (Lernbegleitung), Selina Citera (Lernbegleitung)
Weiterentwicklung RDZ Wattwil 2023: Christof Peter (Leitung), Thomas Boos (Lernbegleitung), Michael Burtscher (Lernbegleitung), Simela Müller (Lernbegleitung)
Weiterentwicklung RDZ Sargans 2025: Christoph Näf (Lernbegleitung), Kenneth Vogt (Lernbegleitung), Pascale Frauchiger (Lernbegleitung), Barbara Caviezel (Lernbegleitung), Arunthathi Srikumar (Studentische Mitarbeitende)
Weiterentwicklung RDZ Rorschach 2026: Delia Untersander (Lernbegleitung), Alexandra Riz (Lernbegleitung), Nadine Allenspach (Lehrperson), Jasmin Koller (Lehrperson), Guido Knaus (Lernbegleitung), Sandra Zehnder (Zentrumsleitung RDZ)

Fachdidaktische Prüfung der Lernaufgaben

Dr. Susanne Kuratli (Dozentin Mathematik), Christof Peter (Dozent Mathematik)

Danke für weitere Unterstützung

René Schoob, Gerd Oberdorfer, Hansjörg Jehli, Pius Zottele, Laura Sarcinella, Vanessa Cipriano, Arani Chandrakumar, Andri Rhyner, Chiara Müller, Stephanie Eugster, Anja Meier, Jenny Robl

Redaktion Handreichung

Fachdidaktischer Teil: Michaela Scheffknecht (Dozentin Mathematik)
Allgemeiner Teil: Sandra Zehnder (Zentrumsleitung RDZ)

Fotos und Layout Handreichung

Andreas Butz, Adrian Streuli
Nicole Berger

Auflage: 200 Exemplare
© PHSG im Februar 2026



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Auf dem Weg zur nachhaltigen Zahlbegriffsentwicklung	5
Die Lernumgebung «ZÄHL:reich»	10
Die Arbeit in der Lernumgebung	11
Organisatorisches	13
Quellenverzeichnis	14

Einleitung

Unsere Welt ist ZAHL:reich – Zahlen begegnen Kindern und Jugendlichen in ihrem Alltag an vielen Stellen. Ob Längen zu bestimmen, Rechenoperationen durchzuführen, einzukaufen, nach Rezept zu backen oder Muster zu deuten – Zahlen helfen uns dabei, Grössen, Mengen oder Anteile und Regelmässigkeiten zu beschreiben, zu vergleichen und mit diesen zu operieren.

Unsere Zahlen standen uns nicht immer in der Form, wie wir sie heute kennen, zur Verfügung. Bereits vor Tausenden von Jahren wurden Zahlen von Ägyptern und alten Römern notiert. Dafür wurden Zeichen in Stein gemeisselt oder später auf Papyrus geschrieben. Diese Zeichen mussten addiert werden, um den genauen Zahlwert bestimmen zu können. Das Rechnen war damals sehr kompliziert. Erst durch das Einführen von unserem praktischen Dezimalsystem mit einem eigenen Zeichen für die Anzahl 0 wurde das Rechnen einfacher.

Im Lehrplan sind Zahlen einerseits vorgesehen, um Rechenoperationen durchzuführen und numerische Phänomene zu beschreiben. Andererseits sollen auch die Zahlen selbst qualitativ aktiv-entdeckend erforscht werden. Wie ist unser Stellenwertsystem aufgebaut? Wie gross ist ein Kubikmeter? Können Zahlen unendlich gross werden? Wo begegnen uns Zahlen in der Natur? In der Lernumgebung «ZAHL:reich» können Schüler:innen Zahlen unter diesen verschiedenen Aspekten erleben und erforschen.

Diese Handreichung liefert einen Einblick in die Inhalte und den Aufbau der Lernumgebung.

Die Lernumgebung ist für Volksschulklassen aller drei Zyklen (KG bis Sek I) konzipiert und kann von Schulklassen, Lehrpersonen, Schulleitungen, Studierenden sowie weiteren Interessierten besucht werden. Die Lernbegleitungspersonen freuen sich auf Ihren Besuch.

Lernort «Regionales Didaktisches Zentrum» (RDZ-PHSG)

Die Regionalen Didaktischen Zentren der Pädagogischen Hochschule St.Gallen (RDZ-PHSG) sind dezentrale Bildungsorte mit innovativen Lern- und Lehrräumen für regionale Bildungsakteurinnen und -akteure (Lehrpersonen, Schulleitende, Studierende und Mitarbeitende der PHSG).

Sie bieten eine breite Palette von Dienstleistungen, die darauf abzielen Unterrichts-, Schul- und Professionalisierungsprozesse anzustossen, zu begleiten und reflektieren. Ihre Hauptaufgaben bestehen in:

- **Beratung und Begleitung:** Die RDZ bieten Beratung und Begleitung bei der Unterrichtsplanung und -gestaltung. Dies umfasst u. a. didaktische Unterstützung in verschiedenen Fachbereichen und auf unterschiedlichen Schulstufen.
- **Material- und Medienangebote:** Die RDZ verfügen über umfangreiche Bibliotheken und Mediatheken, in denen Lehrpersonen Lernmaterialien, Lehrmittel, Literatur und digitale Medien finden, die sie im Unterricht einsetzen können.
- **Weiterbildung und Schulentwicklung:** Die RDZ organisieren Weiterbildungen für Lehrpersonen und Schulleitungen und tragen zur Entwicklung von Schulen bei. Sie bieten Workshops und Kurse an, die sich an aktuellen pädagogischen und (fach-)didaktischen Themen orientieren.
- **Innovationsprojekte:** Die RDZ fördern auch die Umsetzung von innovativen Unterrichtskonzepten und pädagogischen Ansätzen. Sie unterstützen Schulen u.a. bei der Integration von neuen Technologien und der digitalen Transformation.
- **Vernetzung:** Die RDZ verbinden die Hochschule (PHSG) mit den Schulen sowie weiteren Bildungspartner:innen der Region bei der Bearbeitung von gesellschaftlich, kantonal, regional und/oder schulhausbezogenen Bildungsthemen.



Abbildung 2: Anzahlen im Tausenderfeld

Auf dem Weg zur nachhaltigen Zahlbegriffsentwicklung

Zahlbegriffsentwicklung: Was ist eigentlich eine Zahl?

Um einen tragfähigen Zahlbegriff entwickeln zu können, sind zahlreiche Erfahrungen mit Zahlen in ihren verschiedenen Bedeutungen und Darstellungen notwendig. Eine Zahl kann eine Menge beschreiben, aber auch eine Position in einer Reihe. Eine Zahl kann als Zahlwort ausgesprochen werden, mit Plättchen gelegt oder in einer Stellenwerttafel notiert werden. Damit verbunden sind verschiedene mathematische Kompetenzen, die sich im Sinne des Spiralprinzips immer weiterentwickeln.

Zahlaspekte – die verschiedenen Bedeutungen der Zahlen

Zahlen kommen in unserem Alltag in verschiedenen Bedeutungen vor (vgl. Benz et al., 2015, S. 118–121). Sie repräsentieren Mengen (*kardinaler Zahlaspekt*) – z.B. 24 Kinder, 12 Tische oder 8 Holzwürfel. Solche Mengen können zerlegt und zusammengefasst, verglichen und abgezählt werden. Zahlen beschreiben aber auch eine Position, eine Stelle in einer Reihenfolge (*ordinaler Zahlaspekt*) – z.B. der zweite Platz beim Laufwettbewerb, das fünfte Feld auf dem Spielplan oder die sechste Position in der Warteschlange.

Ausserdem dienen Zahlen auch dazu, eine wiederholte Handlung zu beschreiben (*Operatoraspekt*) – dieser Aspekt ist notwendig, um z.B. ein tragfähiges Verständnis der Multiplikation zu entwickeln. Und nicht zuletzt stehen Zahlen oft mit Masseinheiten in Verbindung (*Masszahlaspekt*) – z.B. 34 kg, 10 cm oder 60 Sek. Dabei müssen Kinder Verständnis dafür entwickeln, dass z.B. drei Kirschen nicht gleich viele sind, wie 3 kg Kirschen.

Strukturierte und relationale Zahlvorstellung

Wichtig ist, dass Schüler:innen die verschiedenen Zahlaspekte kennenlernen und in Bezug auf Zahlen auch eine *strukturierte Zahlvorstellung* entwickeln.

Das Strukturieren und Zerlegen von Mengen in Teilmengen ermöglicht es nämlich, Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen zu verstehen (vgl. Benz et al., 2024). Ohne solche Einsichten ist die Entwicklung von flexiblen Rechenkompetenzen nicht möglich. Sollen Beziehungen nicht nur innerhalb einer Anzahl, sondern zwischen zwei oder mehreren Mengen beschrieben werden, ist eine *relationale Zahlvorstellung* notwendig. Durch diese Vorstellung kann z.B. eine Differenzmenge bestimmt werden.

Einen Überblick über die verschiedenen Zahlvorstellungen verbunden mit den entsprechenden Zahlaspekten bietet das Modell von Padberg & Benz (2021, S. 10) in der Abb. 3.

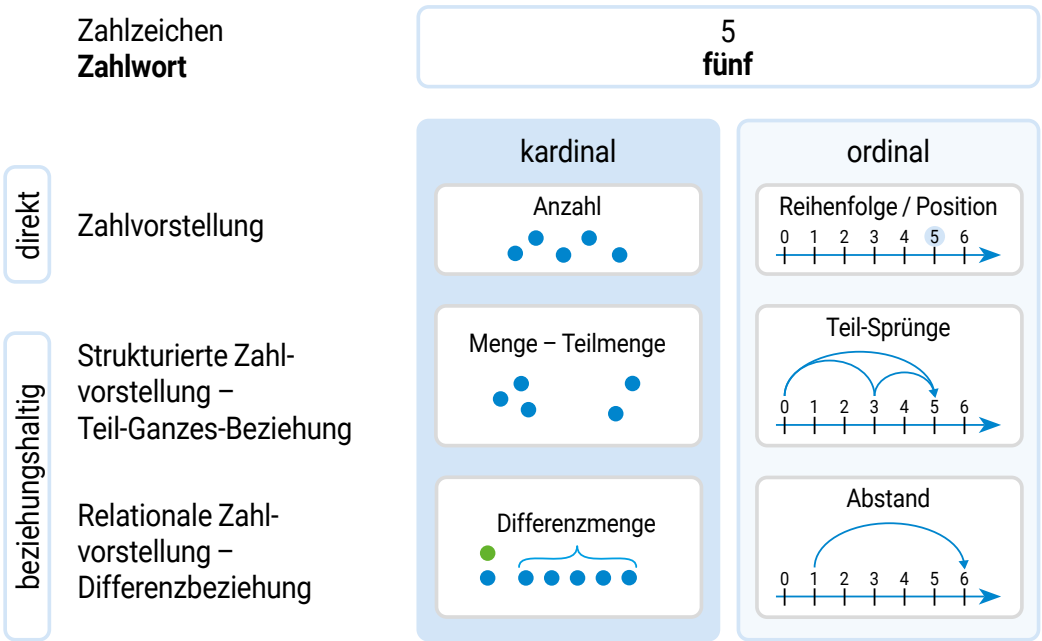


Abbildung 3: Zahlvorstellungen nach Padberg & Benz (2021, S. 10).

Unser geniales Stellenwertsystem

Unsere Zahlschrift ist ein Ergebnis einer sehr sehr langen Entwicklung. Bis ins 16. Jahrhundert wurde im deutschsprachigen Raum die römische Zahlschrift verwendet. Damals gab es nur wenige Rechenmeister, die Grundrechenoperationen mit grossen Zahlen durchführen konnten (vgl. Padberg &

Benz, 2021, S. 73). Dank unserem Stellenwertsystems ist das heute bereits für Primarschüler:innen möglich.

Die römische Zahlschrift

Bei der römischen Zahlschrift wurden für die Eins, Fünf, Zehn, Fünfzig, Hundert, Fünfhundert, Tausend etc. eigene Zeichen verwendet.

1	5	10	50	100	500	1 000
I	V	X	L	C	D	M

Abbildung 4: Anzahl Smarties bestimmen und schätzen





Abb: 6: Wie finden wir das Gleichgewicht?

Die Lernumgebung «ZAHL:reich»

Die Lernumgebung ZAHL:reich fokussiert auf dem Kompetenzbereich «Zahl und Variable» und berücksichtigt die drei Handlungsaspekte des Lehrplans Volksschule: a) Operieren und Benennen, b) Erforschen und Argumentieren und c) Mathematisieren und Darstellen.

Hierzu sind sechs Lernräume mit passenden Lernstationen eingerichtet:

- Zahlensystemraum
- Schätzraum
- Gleichungsraum
- Massraum
- Strukturraum
- Unendlichkeitsraum

Die jeweiligen Räume und Lernstationen sind gestalterisch und didaktisch so aufbereitet, dass sich die Schüler:innen in ausgewählte Schwerpunkte handlungsorientiert vertiefen können. Zudem erhalten sie die Möglichkeit, die mathematischen Inhalte mit dem Alltag zu verknüpfen.

Bezug zu Kompetenzen im Lehrplan

Die Inhalte in der Lernumgebung orientieren sich an entwicklungsorientierten Zugängen (EOZ) und an den Kompetenzen des Lehrplans Volksschule. Eine Übersicht zu den Lehrplanbezügen findet sich auf der Webseite des RDZ.

Die Arbeit in der Lernumgebung

Der Besuch der Lernumgebung «ZAHL:reich» lässt sich in die Phasen eines vollständigen Lernzyklus einbetten (vgl. Abb 7), welche nachfolgend beschrieben werden.

Vorbereitung im Klassenverband

Damit vor Ort möglichst viel Zeit zur Auseinandersetzung mit den Lerninhalten zur Verfügung steht, sind die Lehrpersonen gebeten, die Klasse auf den Besuch vorzubereiten und das Vorwissen der Schüler:innen zum Thema abzuholen. (Mögliche Fragen je nach Zyklus: Wozu brauchen wir Mathematik? Wieso gibt es Zahlen? Warum rechnen wir?)

Klassenbesuch im RDZ

Beim gemeinsamen Einstieg wird das erarbeitete Vorwissen der Schüler:innen aufgegriffen, verschiedenen Alltagsbezügen (z.B. Mobilität, Zuhause, Natur) zugeordnet und in Form eines Mindmaps visualisiert. Dieses wird während des Klassenbesuchs im RDZ laufend ergänzt und weiterentwickelt.

Anschließend vertiefen sich die Schüler:innen gruppenweise in mathematische Lerninhalte. Diese sind für alle Zyklen (1-3) aufbereitet, inhaltlich gebündelt und sechs Räumen zugeordnet (Zahlen-

systemraum, Schätzraum, Gleichungsraum, Massraum, Strukturraum, Unendlichkeitsraum).

Beispiel Zahlensystemraum:

- Im Zyklus 1 unterstützen die Kinder Käpt'n Zahlenbart dabei, seinen Schatz zu sortieren und zu zählen.
- Im Zyklus 2 und 3 erforschen die Schüler:innen neue Zahlensysteme.

In einem weiterführenden Teil (Tagesbesuch) stehen unterschiedliche handlungsorientierte Vertiefungsangebote im Zentrum. Mit mathematischen Spielimpulsen können die Kinder das Gelernte vertiefen (Zyklus 1). Die Schüler:innen des Zyklus 2 und 3 haben die Möglichkeit, sich entdeckend-forschend in weitere mathematische Fragestellungen zu vertiefen und diese z.B. in Mathekonferenzen gemeinsam weiterzuentwickeln und zu präsentieren. Für die Bearbeitung stehen vielfältige didaktische Materialien zur Verfügung.

Das Erarbeitete und Gelernte wird abschliessend im Plenum zusammengetragen.

Die Lernbegleitungspersonen moderieren den Einstieg und Abschluss, begleiten die Schüler:innen zusammen mit der Lehrperson und unterstützen bei Fragen.

	Annäherung	Aufbau	Durcharbeiten	Üben	Anwenden	Prüfen
PADUA	Problem-darstellung und Vorwissen aktivieren	Neues reguläres Wissen aufbauen	Verständnis des Neuerlernten klären	Vertiefen und üben	Übertragen in Anwendungssituationen und eigenständige Vorhaben	Abschliessend überprüfen
LUKAS	Konfrontationsaufgaben	Erarbeitungsaufgaben	Vertiefungs- und Übungsaufgaben		Transfer- und Synthesaufgaben	

Abb: 7: Phasen eines vollständigen Lernzyklus, wie er im Rahmen der Lernumgebung berücksichtigt wird (in Anlehnung an Aebli, 1983; Luthiger et al., 2018)

Ihre Rolle während des Besuchs

Die Lehr- und Begleitpersonen sind Dialogpartner:innen der Schüler:innen. Sie beobachten und versuchen das individuelle Lernen mit gezielten Fragen anzuregen.

Dies ermöglicht eine optimale Lernerfahrung der Schüler:innen im Rahmen ihres Besuchs im RDZ.

Die Lernbegleitung:

- traut den Schüler:innen Eigenständigkeit und Eigenverantwortung zu,
- lässt den Schüler:innen Freiheit und ermuntert sie neue Wege mit Originalität zu gehen,
- unterstützt die Schüler:innen eigenständig Neues zu entdecken und zu erfahren,
- versucht in die Gedankengänge der Schüler:innen einzutauchen und unterstützt individuell,
- ist selbst lernend und fragt bei den Schüler:innen nach für Erklärung und Präzisierung,
- unterstützt die Schüler:innen bei Herausforderungen,
- ermutigt sie, Neues zu wagen und auszuprobieren und
- sieht Irrwege als Chance für den Einblick in die individuellen Denkprozesse der Schüler:innen (Brunner, 2007)

Weitere Aspekte, insbesondere bezüglich der «richtigen Frage zur richtigen Zeit» (Elstgeest, 1985), werden im Rahmen des Einführungskurses angesprochen.

Vertiefung im Schulzimmer

Die im RDZ gemachten Erfahrungen werden im Unterricht idealerweise nochmals aufgenommen und vertieft. Hierfür stehen auf der Webseite des RDZ mögliche Vertiefungsangebote zur Verfügung.

Einführungskurs für Lehrpersonen

Als Vorbereitung ist der Besuch eines Einführungskurses für Lehrpersonen (auch online möglich) erforderlich. Mit dem Besuch einer rund 90-minütigen Einführungsveranstaltung tauchen Sie in das Angebot ZAHL:reich ein. Sie werden von einer Lernbegleitperson in die Lernumgebung eingeführt. Ausserdem lernen Sie die Lernorte und Materialien vor Ort kennen und haben Zeit, diese zu sichten. Sie erhalten weiterführende Informationen sowie hilfreiche Ideen zur Vorbereitung des Klassenbesuchs.

Einführung plus: Lernumgebung und Weiterbildungsangebot mit Fokus Unterrichtsentwicklung

Ergänzend zum Einführungskurs bieten wir die Einführung plus an. In diesem Format wird mit ergänzenden Beispielen und Ideen aufgezeigt, wie der Besuch der Lernumgebung im RDZ in den eigenen Unterricht eingebettet werden kann.

Im Anschluss an die Informationen zur Lernumgebung wird die Zeit genutzt, um direkt vor Ort gemeinsam eine Unterrichtsskizze passend zur Lernumgebung zu erstellen. Fachpersonen aus dem Institut Mathematische und Naturwissenschaftliche Bildung (IMNT) und der Praxis (RDZ) werden Sie unterstützen. Die Lehrpersonen haben die Gelegenheit sich zu vernetzen und individuelle Stärken und Ressourcen einzubringen. Vor Ort können verschiedene Medien und Materialien beigezogen werden. Die Einführung plus dauert ca. drei Stunden und kann als Weiterbildungshalbtag angerechnet werden.

Die aktuellen Termine für die Einführung und die Einführung plus finden Sie auf unserer Website.



Abbildung 8: Wer parkiert wann?

Organisatorisches

Klassenbesuche

Besuche sind von Montag bis Donnerstag möglich. Vereinbaren Sie mit dem Sekretariat frühzeitig einen Termin. Der Besuch eines Einführungskurses ist vor dem Klassenbesuch in der Lernumgebung für die verantwortliche Lehrperson verbindlich. Es ist auch möglich, dass ein ganzes Team eine Einführung besucht.

Besuchsdauer

Es sind Halbtages- oder Tagesbesuche möglich. Grundsätzlich empfehlen wir einen Tagesbesuch, damit sich die Schüler:innen vertieft mit dem Thema auseinandersetzen können. Es besteht die Möglichkeit vor Ort ein Picknick einzunehmen.

Begleitpersonen

Unsere bisherige Erfahrung zeigt, dass die Schüler:innen von einer nahen Begleitung profitieren. Deshalb sind wir auf Unterstützung von weiteren Begleitpersonen, nebst der Lehrperson angewiesen (z.B. Klassenassistenten, SHP, Eltern):

- Zyklus 1 (KG): 3 zusätzliche Begleitpersonen
- Zyklus 1 (US): 2-3 zusätzliche Begleitpersonen
- Zyklus 2 (3./4. Kl.): 2 zusätzliche Begleitperson
- Zyklus 2 (5./6. Kl.): 1-2 zusätzliche Begleitperson
- Zyklus 3: keine zusätzliche Begleitperson

Kosten

Der Besuch ist für Klassen und Lehrpersonen der Kantone SG, AR und GR sowie für Studierende der PHSG während der Praktika kostenlos. Klassenbesuche aus anderen Kantonen sind sehr willkommen, aber nicht kostenfrei.

Anmeldung und Auskünfte

Mit dem Anmeldeformular auf der Website können Sie Ihre Wunschtermine definieren. Gerne können Sie den Besuchstermin auch telefonisch oder per Mail mit dem Sekretariat des zuständigen RDZ vereinbaren. Die definitive Anmeldung sollte bis spätestens sieben Tage vor dem Klassenbesuch erfolgen.

Quellenverzeichnis

Aebli, H. (1983). Zwölf Grundformen des Lehrens – Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Benz, Ch., Maier, A., Reuter, F., Sprenger, P. & Zöllner, J. (2024). Mathematik entdecken in Kita und Grundschule. Hannover: Kallmeyer Klett.

Benz, Ch., Peter-Koop, A. und Grüßing, M. (2015). Frühe mathematische Bildung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Brunner, E. (2007). Forschendes Lernen. Eine begabungsfördernde Unterrichtskonzeption (2. Aufl.). Lehrmittelverlag des Kantons Thurgau.

Elstgeest, J. (1985). The right question at the right time. In W. Harlen (Ed.), Primary science: Taking the plunge (S. 36–46). Oxford: Heinemann Educational.

Luthiger, H., Wilhelm, M., Wespi, C. & Wildhirt, S. (2018). Kompetenzförderung mit Aufgabensets. Theorie-Konzept-Praxis. Bern: hep.

Krauthausen, G. (2018). Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule (4. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Padberg, F. & Wartha, S. (2023). Didaktik der Bruchrechnung (6. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Padberg, F. & Benz, Ch. (2021). Didaktik der Arithmetik (5. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

<https://pikas.dzlm.de/unterricht/gute-aufgaben>

Wittmann, E. & Müller, G. (2022). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins (3. Auflage). Hannover und Stuttgart: Klett Kallmeyer.



Abbildung 9: Wie viel Wasser passt in den Kubikdezimeter?

